~~F~~ÍSICA: (Formularios) Definiciones, demostraciones, etc

Ejercicios de unidades y conversiones (la clave está en usar las potencias en donde están las unidades

Sistema Internacional de Unidades

Magnitudes ⟶ modelo estándar

masa	Kg
longitud	m
temperatura	K
tiempo	s

Están las compuestas, que son una composición de varias magnitudes

• Vectores: Es una flecha que posee magnitud (tamaño), dirección (hacia donde va) y sentido (donde apunta). Ofrece más información que un número.

SUMA GRÁFICA: De manera, se realiza la regla del triángulo y por la regla del paralelogramo (vectores paralelos

Anotaciones:

• Un vector unitario es un vector de magnitud o modulo uno y se denota con $\hat{A}$.

$$\hat{A} = A \cdot \frac{1}{|\vec{A}|} = \frac{A}{|\vec{A}|} = 1$$

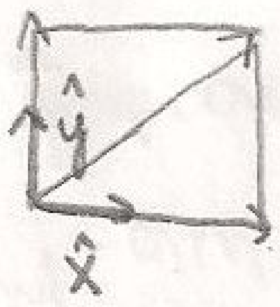
• Una base de espacio N-dimensional. (N=2 para un plano, N=3 en nuestro espacio usual) es un conjunto de N vectores no colineales. Sirven como referencia para escribir otro vector en el espacio. PREFERIMOS LAS BASES ORTONORMALES, cuyos vectores son perpendiculares 2:2 y son unitarios

• Un sistema de referencia se define como un punto llamado origen y una base en el espacio, permite identificar algo con un vector.

• El vector posición de un punto p del espacio es un vector ($\vec{r}_p$) que parte del origen (O) de un sistema de referencia y apunta a P.

Combinación lineal de vectores dado un sistema de referencias

En este caso

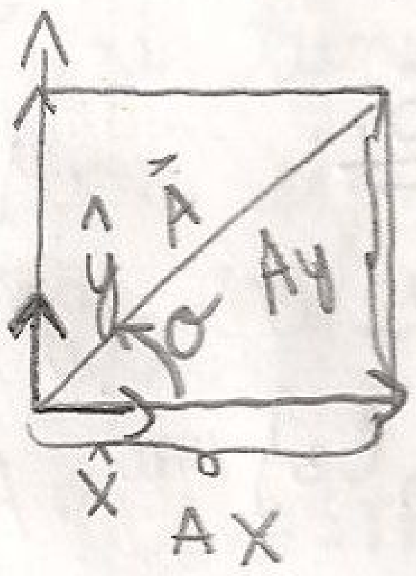


$\vec{A} = 2\hat{x}$ $\quad \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{x} + 2\hat{y}$

$\vec{B} = 2\hat{y}$

$A_X = 2$ y $A_Y = 2$ son componentes del vector X en la base $\hat{x}$ y $\hat{y}$ ó $\{\hat{x}, \hat{y}\}$.

Las componentes de un vector posición ($\vec{r}_p$) son las coordenadas del punto que indica.

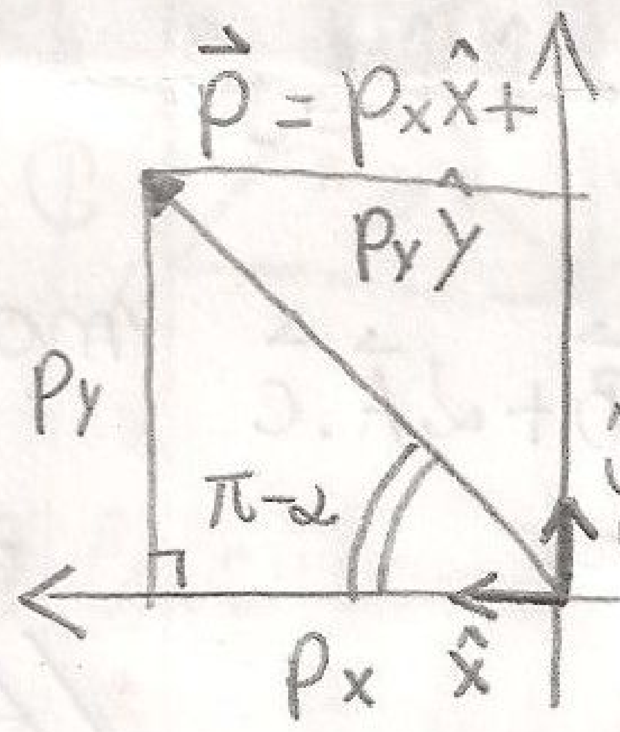


$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$$

En su forma genérica, se pueden demostrar como:

$$\vec{A} = |\vec{A}| \left(\cos(\sigma) \hat{x} + \operatorname{sen}(\sigma) \hat{y} \right)$$

Se demuestra:



En el modo genérico

$$\vec{p} = |\vec{p}| \left(\cos(\sigma) \hat{x} + \operatorname{sen}(\sigma) \hat{y} \right)$$

$\cdot |\vec{p}| \cos(\sigma) \hat{x} < 0$

$\cdot |\vec{p}| \operatorname{sen}(\sigma) \hat{y} > 0$

Desarrollamos:

$$p_x = |\vec{p}| \cos(\sigma)$$

$$\Rightarrow p_x = |\vec{p}| (\cos(\pi - \alpha)) = |\vec{p}| \left(\cos(\pi) \cos(\alpha) + \cancel{\operatorname{sen}(\pi) \operatorname{sen}(\alpha)}^{\,0} \right)$$

$$= |\vec{p}| \left((-1) \cos(\alpha) \right) = -|\vec{p}| \cos(\alpha)$$

$$p_y = |\vec{p}| \operatorname{sen}(\sigma) \Rightarrow$$

$$p_y = |\vec{p}| \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = |\vec{p}| \left(\cancel{\operatorname{sen}(\pi) \cos(\alpha)}^{\,0} - \cos(\pi) \operatorname{sen}(\alpha) \right)$$

$$|\vec{p}| ((-1)(\operatorname{sen}(\alpha))(-1) = |\vec{p}| \operatorname{sen}(\alpha)$$

Coinciden: Por lo tanto

$$\vec{p} = |\vec{p}| \operatorname{sen}(\alpha) \hat{y} - |\vec{p}| \cos(\alpha) \hat{x}$$

Un escalar es un número que no sufre modificaciones al cambiarse el sistema de referencia (S.R)

• Las componentes de un vector cambian al modificarse el sistema de referencia, ya que el espacio es aparentemente modificado

• LA MAGNITUD o módulo de un vector ES un escalar, su tamaño no cambia

•PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES:

Para los vectores de una base ortonormal en el espacio $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ una operación tal que si:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_{j2} = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{i} = \hat{j} \\ 0 & \text{si } \hat{i} \neq \hat{j} \end{cases}$$

Por lo tanto $\hat{i}.\hat{i} = 1$, $\hat{j}.\hat{j} = 1$ y $\hat{k}.\hat{k} = 1$

Propiedades:

i). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{A}.(\vec{B} + \alpha\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \alpha\vec{A}.\vec{C}$

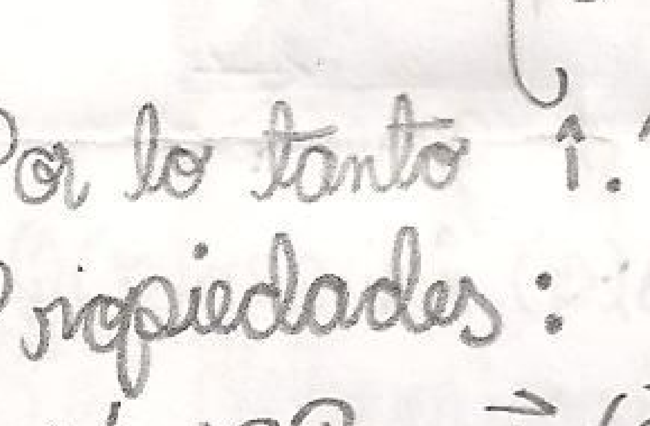
ii). El resultado es un escalar.

•Fórmulas:

∘ $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

∘ Dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con un ángulo entre ellos $(\theta) \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\operatorname{Cos}(\theta)$

·Demostración



Sea el S.R

$\cdot\vec{A} = |\vec{A}|\hat{i}$. Su módulo es $|\vec{A}| = A_x$

$\cdot\vec{B} = B_1\hat{i} + B_y\hat{y}$

Pero si empleamos la forma genérica:

$$\vec{B} = |\vec{B}|(\operatorname{Cos}(\theta)\hat{i} + \operatorname{Sen}(\theta)\hat{j})$$

Si $|\vec{B}|\operatorname{Cos}(\theta)$ y $|\vec{B}|\operatorname{sen}(\theta)$

Si empleamos el producto escalar por componentes

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|(\operatorname{Cos}(\theta)) + 0.\cancel{(|\vec{B}|\operatorname{Sen}(\theta))} =$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\operatorname{Cos}(\theta)$$

Anotaciones:

•Si $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$

ya que forman $\theta = \frac{\pi}{2}$

•Si $\vec{A} \parallel \vec{B} = \|\vec{A}\|^2 = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$

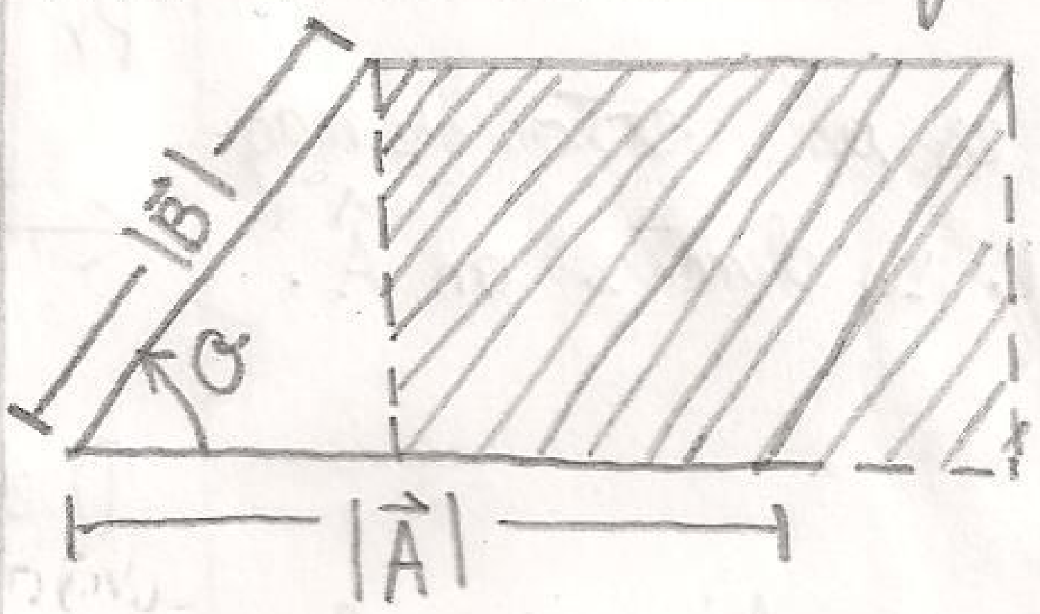
•Módulo de un vector: $\|\vec{A}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Puedo hacerlo de manera distributiva

·Ángulo entre 2 vectores con ayuda del producto escalar.

$$\arccos\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}\right) = \theta$$

Demostración del área del paralelogramo mediante el producto vectorial



Tratamos de desplazar y formar un cuadrado

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = Área del paralelogramo

·Lado del cuadrado: $|\vec{A}|$

·Cateto opuesto al triángulo con respecto a θ: $|\vec{B}|\operatorname{Sen}(\theta)$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \left||\vec{A}|.|\vec{B}|.\operatorname{sen}(\theta)\hat{n}\right|$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|\operatorname{Sen}(\theta)$$

•PRODUCTO VECTORIAL ENTRE DOS VECTORES:

...o una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ...entada según la regla de la mano derecha, en el que

i). $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \\ \pm\hat{e}_3, & \text{si } \hat{e}_1 \neq \hat{e}_2 \neq \hat{e}_3 \end{cases}$

Regla de la mano derecha (según yo):

- Si sigue las agujas del reloj, mantiene el signo
- Si va en sentido contrario de las agujas del reloj, cambia el signo

- Anotaciones:

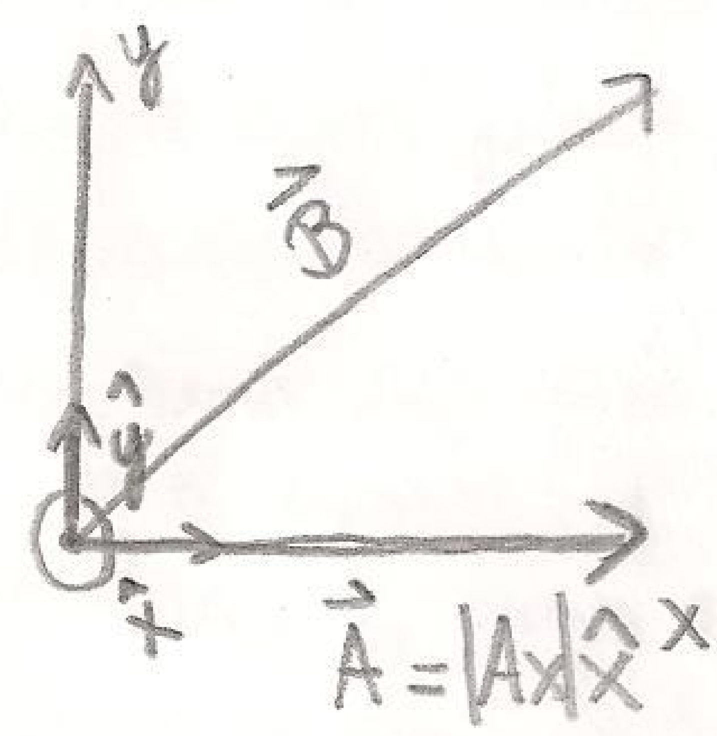
1). $\vec{A} \times (\vec{B} + \alpha\vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \alpha \vec{A} \times \vec{C}$

2). $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ El producto vectorial es anticonmutativo

Fórmula: $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}| \operatorname{sen}(\theta)\hat{n}$

$\hat{n}$ = vector unitario perpendicular orientado según la regla de la mano derecha y perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

DEMOSTRACIÓN



⊙ vector que sobresale por la regla de la mano derecha

$\vec{B} = |\vec{B}|(\cos(\theta)\hat{x} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{y})$

Si empleamos fuerza bruta

$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}|\hat{x}) \times (|\vec{B}|\cos(\theta)\hat{x} + |\vec{B}|\operatorname{sen}(\theta)\hat{y})$

$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}|.|\vec{B}|\cos(\theta))(\cancel{\hat{x} \times \hat{x}})^{0} + (|\vec{A}|.|\vec{B}|\operatorname{sen}(\theta)) (\hat{x}.\hat{y})$

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}| \operatorname{sen}(\theta)\hat{z}$

Cuando 2 vectores son paralelos,

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}| \operatorname{sen}(\theta).\hat{n} = 0$

ya que $\operatorname{sen}(0°) = 0$

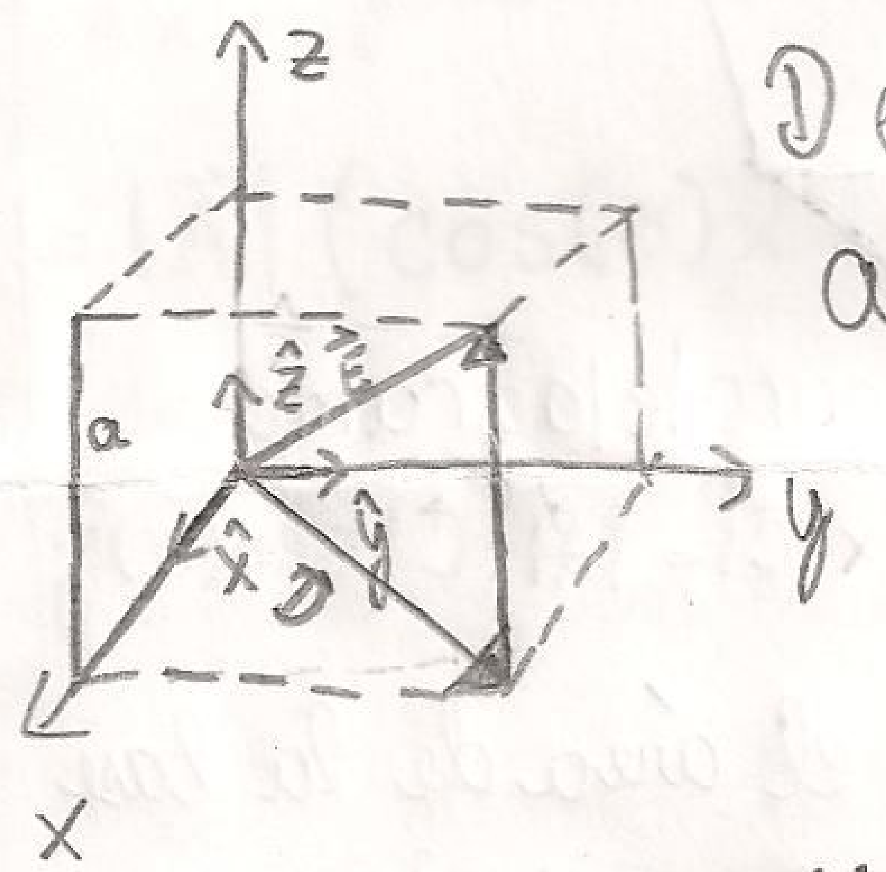
FÓRMULA DE LOS COSENOS DIRECTORES: Dado un vector $\vec{A}$ en el sistema de referencia $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$

$\vec{A} = |\vec{A}|(\cos(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath} + \cos(\theta)\hat{z})$

Si tienen lados iguales, sus ángulos son iguales y por ello

$\cos^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_x) = 1$

DEMOSTRACIÓN: Un cubo de aristas iguale...



D e aristas a:

$a = a_x = a_y = a_z$

Calculamos la diagonal del cubo ($\vec{D}$)...

$\vec{D} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$; $a + a = 2a$ y ahora calculamos ot... diagonal $\vec{E} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_y\hat{z} = 3a$

Si calculamos el ángulo entre los vect...res $\vec{D}$ y la arista a por producto es...calar

$\vec{E}.\vec{a} = |\vec{a}|.|\vec{E}|.\cos(\theta) \Rightarrow \vec{E}.\vec{a} = 1.\sqrt{3}\cos(\ldots$

$\|\vec{E}\| = \sqrt{\|\vec{D}\|^2 + A_z^2}$

$\|\vec{E}\| = \sqrt{(\sqrt{1^2+1^2})^2 + A_z^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{3}\cos(\theta)$

$\|\vec{E}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$

$\|\vec{E}\| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ Por lo tanto

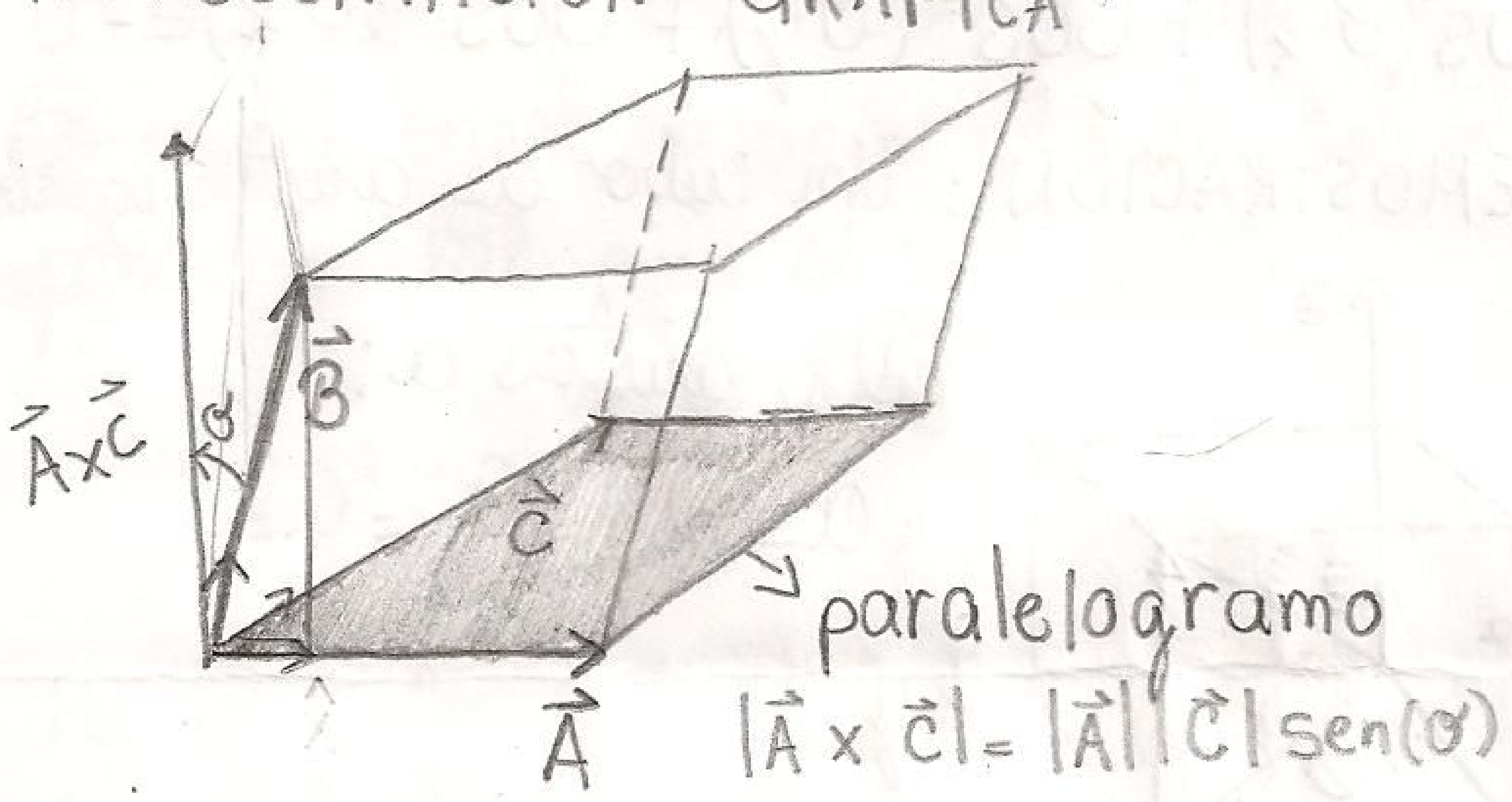
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = 1$$

PRODUCTO TRIPLE:

Demostración del volumen del paralelepípedo con producto triple (mezcla del producto escalar y producto vectorial).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



Se determina que el área de la base se determinará por el producto vectorial $|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{C}|.\,sen(\theta)$

mientras que la altura del paralelepípedo sera: $|\vec{B}| = |\vec{B}||\cos(\theta)|$

producto escalar

Se forma un ángulo (θ) entre el escalar $\vec{B}$ y el vector $\vec{A}\times\vec{C}$. Por lo que el volumen del paralelepípedo es:

$$V = (A_{(base)})(Altura) = |\vec{A}\times\vec{C}|.|\vec{B}||\cos(\theta)|$$

Lo cual es igual a $\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})$

y el área resultante serán los módulos

$$|\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})|$$